Литература

1. Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V. *Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians* // Russ. J. Math. Phys. – 1994. – V. 2. – № 2. – P. 235–250.

2. Leandre R., Volovich I.V. *The Stochastic Levy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2001. – V. 4.– № 2. – P. 161–172.

3. Аккарди Л., Смолянов О.Г. *Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях* // ДАН. –2006. – Т. 407.– № 5. – С. 583–588.

4. Klingenberg W. *Riemannian geometry*. – de Gruyter Studies in Mathematics. V. 1, Berlin, 1982.

LEVY-LAPLACIAN ON INFINITE-DIMENSIONAL MANIFOLD

B.O. Volkov

The article discusses the connection between two definitions of the Levy-Laplacian on an infinite-dimensional manifold. In the first of the definitions, the Levy-Laplacian is defined as the Cesaro mean of the second order directional derivatives. In the second one, the Levy-Laplacian is given as an integral functional defined by a special kind of the second derivative. Interest in the Levy-Laplacian is due to its connection with the gauge fields.

Keywords: Levy-Laplacian, infinite dimensional manifold, Yang-Mills equations.

УДК 517.518

СЛАБЫЕ И СИЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГРУБЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ХАУСДОРФА НА *P*-АДИЧЕСКОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.С. Волосивец[1]

1 *volosivetsss@mail.ru*; НИУ Саратовский государственный университет

Для грубых операторов типа Хаусдорфа, определенных на p-адическом линейном пространстве Q_p^n, и их коммутаторов с символом из пространства Липшица мы приводим достаточные условия их ограниченности из одного пространства Лоренца в другое.

Ключевые слова: оператор Хаусдорфа, коммутатор, слабый тип, пространство Лоренца, интерполяция.

Пусть p – простое число и $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$. Если x записано в вид $x = p^\gamma m/n$, где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и $m, n \in \mathbb{Z}$ взаимно просты с p, то $|x|_p := p^{-\gamma}$ (для $x = 0$ полагаем $|0|_p = 0$). Величина $|x|_p$ имеет все свойства нормы на поле, включая равенство $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ и дополнительное свойство $|x+y|_p \le \max(|x|_p, |y|_p)$. Через $\mathbb{Q}_p$ обозначим замыкание $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$. Каждое $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, имеет представление

$$x = p^\gamma(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^{i+\gamma},$$

где $x_0 \neq 0$, $x_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_i < p$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma}$ и $|0|_p = 0$. С этой нормой $\mathbb{Q}_p$ снова является полем. Пусть $B_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p \le p^k\}$ и $S_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p :$

$|x-x_0|_p = p^k\}$. Так как аддитивная группа $\mathbb{Q}_p$ локально компактна, существует мера Хаара μ, такая что $\mu(B_0)=1$.

Для $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Q}_p^n := \mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}_p\cdots\times\mathbb{Q}_p$ и $t\in\mathbb{Q}_p$ введем $|\mathbf{x}|_p=\max\{|x_i|_p : 1\le i\le n\}$, $t\mathbf{x}=(tx_1,\dots,tx_n)$. Шары $B_k(\mathbf{x})$ и сферы $S_k(\mathbf{x})$, $k\in\mathbb{Z}$, определяются так же, как при $n=1$. Мера Хаара μ на $\mathbb{Q}_p^n$ является произведением n соответствующих мер.

Пространство $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1\le q<\infty$, состоит из комплекснозначных измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_q=\left(\int_{\mathbb{Q}_p^n}|f(\mathbf{x})|^q\,d\mu(\mathbf{x})\right)^{1/q}$. Далее $1/q+1/q'=1$. Функция распределения η_f измеримой на $\mathbb{Q}_p^n$ функции f задается равенством

$$\eta_f(\lambda)=\mu(\{\mathbf{x}\in\mathbb{Q}_p^n : |f(\mathbf{x})|>\lambda\}),\quad \lambda\ge 0.$$

Невозрастающей перестановкой f называется функция f^*, определенная на $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ формулой

$$f^*(t)=\inf\{\lambda : \eta_f(\lambda)\le t\},\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Пусть $0<q,s<\infty$. Пространство Лоренца $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ состоит из всех измеримых функций f на $\mathbb{Q}_p^n$, для которых

$$\|f\|_{q,s}=\left(\int_0^\infty [t^{1/q}f^*(t)]^s\frac{dt}{t}\right)^{1/s}<\infty.$$

Если $s=\infty$ и $1\le q\le\infty$, то $\|f\|_{q,\infty}=\sup\limits_{t>0} t^{1/q}f^*(t)$. Пусть T – оператор, определенный на $L^{q,1}(\mathbb{Q}_p^n)$ и его значения измеримы на $\mathbb{Q}_p^n$, $1\le q<\infty$, $1\le r\le\infty$. Если T ограничен из $L^{q,1}(\mathbb{Q}_p^n)$ в $L^{r,\infty}(\mathbb{Q}_p^n)$, то T называется оператором слабого типа (q,r). Важную роль в работе играет теорема Марцинкевича.

Теорема А. *Предположим, что* $1\le q_0<q_1<\infty$, $1\le r_0,r_1$, $r_0\ne r_1$, $\theta\in(0,1)$ *и*

$$1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1,\quad 1/r=(1-\theta)/r_0+\theta/r_1.$$

Если оператор T *имеет слабые типы* (q_0,r_0) *и* (q_1,r_1), *то* T *ограничен из* $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *в* $L^{r,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *при всех* $1\le s\le\infty$.

О пространствах Лоренца, операторах слабого типа и интерполяционной теореме Марцинкевича см. [2, гл. 4, § 4].

Введем следующий p-адический аналог оператора типа Хаусдорфа, рассмотренного в работе [3],

$$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}(f)(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{Q}_p^n}\frac{\Phi(\mathbf{x}|\mathbf{y}|_p)}{|\mathbf{y}|_p^n}\Omega(\mathbf{y}|\mathbf{y}|_p)f(\mathbf{y})\,d\mu(\mathbf{y}).$$

Здесь $\Omega\in L^1(S_0(\mathbf{0}))$ и мы рассматриваем число $|\mathbf{y}|_p$, равное некоторой степени p, как элемент $\mathbb{Q}_p$. Также мы определяем коммутатор $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}(f):=b\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}(f)-\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}(bf)$, где $b\in\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ для некоторого $0<\beta\le 1$, т.е.

$$\|b\|_{\Lambda_\beta}=\sup\{|b(\mathbf{x}+\mathbf{h})-b(\mathbf{x})|/|\mathbf{h}|_p^\beta : \mathbf{x}\in\mathbb{Q}_p^n,\quad \mathbf{h}\in\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbf{0}\}<\infty.$$

Целью настоящей работы является получение достаточных условий для оценок сильного и слабого типов для $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ в $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ и для $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b$ из $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ в $L^{r,s}(\mathbb{Q}_p^n)$. Поскольку сфера $S_0(\mathbf{0})$ имеет ту же размерность, что и $\mathbb{Q}_p^n$, методы, используемые в работе, отличаются от применяемых в случае $\mathbb{R}^n$ (см. [3] и [4]).

Теорема 1. *Пусть* $1 \le q < \infty$, Φ *радиальна, т.е.* $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x}|_p)$, *где* φ *определена во всех* p^k *и постоянна на всех* $(p^{k-1}, p^k]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Omega \in L^{q'}(S_0(\mathbf{0}))$ *и интеграл*

$$M^{q'}(\varphi, q) := \int_0^\infty |\varphi(t)|^{q'} t^{n(q'-1)-1}\, dt$$

конечен. Тогда $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ *имеет слабый тип* (q, q).

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < \infty$, Φ *и* Ω *такие же, как в теореме 1 и* $M^{q'}(\varphi, q)$ *конечно при* $q \pm \delta$ *вместо* q, *где* $0 \le \delta < \delta_0$. *Тогда оператор* $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ *ограничен в* $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *для всех* $1 \le s \le \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q < r < \infty$, $0 < \beta < 1$, $1/q - 1/r = \beta/n$, Φ *является радиальной функцией,* $\Omega \in L^{q'}(S_0(\mathbf{0}))$, $b \in \Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ *и*

$$\int_0^\infty \varphi^{q'}(t)\, t^{(n(q'-1)-1} \max(1, t^{-\beta q'})\, dt < \infty. \tag{1}$$

Тогда коммутатор $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b$ *имеет слабый тип* (q, r).

Теорема 4. *Пусть* q, r, β, Φ, b *как в теореме 3, а (1) верно для всех* $q \pm \delta$ *вместо* q, *где* $0 \le \delta < \delta_0$. *Тогда оператор* $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b$ *ограничен из* $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *в* $L^{r,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *при всех* $1 \le s \le \infty$.

Следствие. При выполнении условий теоремы 4 оператор $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b$ ограничен из $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ в $L^r(\mathbb{Q}_p^n)$.

Литература

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. *p-адический анализ и математическая физика.* – М.: Наука, 1994. – 352 с.

2. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of operators.* – N.Y.: Academic Press, 1988. – 484 p.

3. Chen J., Fan D., Li J. *Hausdorff operators on function spaces* // Chinese Ann. Math. – 2012. – V. 33B. – P. 537–556.

4. Hussain A., Ahmed M. *Weak and strong estimates for the commutators of Hausdorff operators* // Math. Ineq. Appl. – 2017. – V. 20. – № 1. – P. 49–56.

WEAK AND STRONG ESTIMATES FOR ROUGH HAUSDORFF TYPE OPERATOR DEFINED ON P-ADIC LINEAR SPACE

S.S. Volosivets

For rough Hausdorff type operator, defined on p-adic linear space Q_p^n *and its commutator with symbol from Lipschitz space, we give sufficient conditions of their boundedness from one Lorentz space into another.*

Keywords: Hausdorff operator, commutator, weak type, Lorentz space, interpolation.